

極座標平面にお絵描き

Drawing pictures on polar coordinate plane

朝倉佑哉

東京都立戸山高等学校 SSH 数学 2年

ABSTRACT

I researched how to draw the graph you want on polar coordinate plane. The thesis shows the way of making polar equations which represent any shape of graph. Floor function, ceiling function and the relation between graph on polar coordinate plane and graph on rectangular coordinate plane are used to do so. This enables you to draw picture on polar coordinates as you like with only one polar equation.

Key Word: polar coordinate plane, rectangular coordinate plane, floor function

I. はじめに

私は以前から、複数の関数や方程式のグラフを組み合わせて座標平面上に絵を描く関数アートというものを趣味でしていた。そこで、私はできるだけ少ない方程式で好きな絵を描く方法はないか疑問に思い、様々な方法を試していったところ、極座標平面上ならばどんな形のグラフも1つの極方程式で表せるのではないかと気づいた。このことから、私はグラフを描画すると任意の形のグラフを表すような極方程式を求める方法を研究した。その結果、極座標平面上のグラフ $r = f(\theta)$ と直交座標平面上のグラフ $y = f(x)$ の関係や、床関数・天井関数の性質を利用して、形がわかっている任意のグラフをある程度近似したグラフを表す極方程式を求める方法を見つけた。これを以下で説明する。

II. 方法

作りたいグラフを表す極方程式を求める流れは、極座標平面上のグラフからそれに対応する直交座標上の関数を作って、その関数を複数の領域毎に分けて方程式を求め、最後に関数を元の極方程式に戻すというものである。そもそも目的のグラフを極座標平面上に表すのは、それを直交座標上の関数に展開できるからだ。表したいグラフの形が、変数が1つに定まってももう1つの変数が1つに定まらないようなものであるとき、そのグラフの形という情報だけから方程式を求めることは困難だから、目的のグラフを関数のグラフに置き換えることで考えやすくしていく。さらに、それだけでも関数の式を求めることが難しい場合がほとんどだから、領域ごとに区切って考えていく。これから、例として右の図1の絵を極座標平面上に描く過程を示して説明する。

まず、求めたい極座標平面上のグラフを直交座標上の関数に展開する。求める方程式の、グラフの形は分かっているのでそれを描く。それを表す極方程

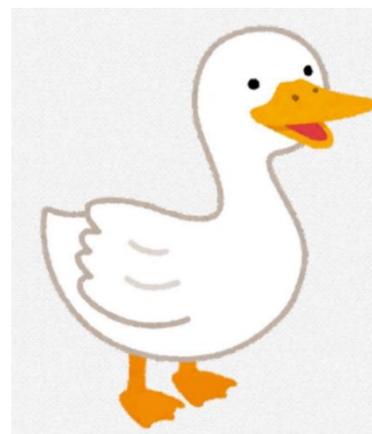


図1 アヒルの絵

式を $r = f(\theta)$ とする。ここでは図1の形を表すグラフの方程式を $r = f(\theta)$ とする。目的は $f(\theta)$ を求めることだ。ここで、極方程式 $r = f(\theta)$ と関数 $y = f(x)$ の関係に注目する。それぞれのグラフはその性質上、 $r = f(\theta)$ では θ が大きい点ほど偏角が大きく、 r が大きい点ほど原点から遠く、 $y = f(x)$ では x が大きい点ほど右にあり、 y が大きい点ほど上にある。よって、偏角と x 方向の大きさ、原点からの距離と y 方向の大きさを対応させることができる。図形的に考えると、 $y = f(x)$ のグラフを原点周りに巻いたものが $r = f(\theta)$ のグラフになる。この関係を使うと、 $r = f(\theta)$ のグラフが分かっているので $y = f(x)$ のグラフが描ける。このとき、 $y = f(x)$ の周期を $4\pi, 6\pi, \dots$ と増やすことで、 $r = f(\theta)$ 上では θ が1つに定まっても r が1つに定まらない θ も、 $y = f(x)$ 上の複数の x に対応させることができる。これによって、求めたいものが周期 $2n\pi$ (n は整数)の周期関数に置き換えられる。

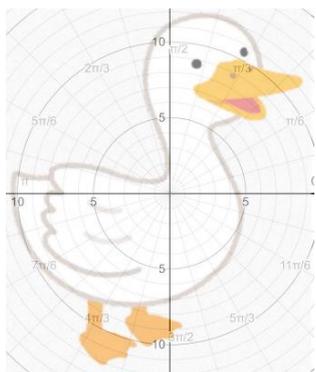


図2 $r = f(\theta)$ のグラフ

図2のアヒルの形のグラフを極座標上から直交座標上の関数に展開すると、図4のようになる。この時、図3の色分けに従って、赤の部分は $0 + 14n\pi \sim 2\pi + 14n\pi$ 、橙の部分は $2\pi + 14n\pi \sim 4\pi + 14n\pi$ 、…の領域で直交座標平面上に表している。

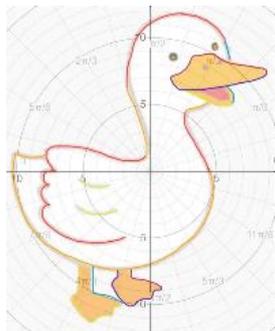


図3 周期毎に色分けした $r = f(\theta)$ のグラフ

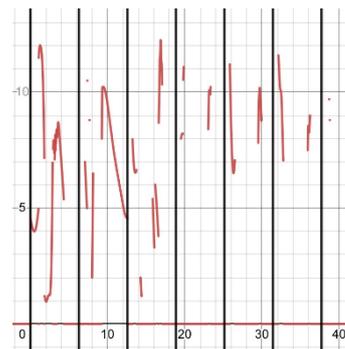


図4 $y = f(x)$ のグラフ

| | |
|----|--------------------------------------|
| 赤 | $0 + 14n\pi \sim 2\pi + 14n\pi$ |
| 橙 | $2\pi + 14n\pi \sim 4\pi + 14n\pi$ |
| 黄緑 | $4\pi + 14n\pi \sim 6\pi + 14n\pi$ |
| 青 | $6\pi + 14n\pi \sim 8\pi + 14n\pi$ |
| 紫 | $8\pi + 14n\pi \sim 10\pi + 14n\pi$ |
| 紅 | $10\pi + 14n\pi \sim 12\pi + 14n\pi$ |
| 薄紫 | $12\pi + 14n\pi \sim 14\pi + 14n\pi$ |

次に、 $y = f(x)$ のグラフを複数の領域に分割する。全体のグラフの形だけ見て $f(x)$ を求めるのは困難なので、 $f(x)$ を領域ごとに異なる関数で表される区分関数とする。不連続な点と微分不可能な点では必ず区切るようにして、かつそれぞれの領域で関数が複雑になりすぎないように領域を分ける。これによって全体では式が分かりにくい関数も領域ごとに分けた関数1つ1つの式は分かりやすくなる。図5は、図4の $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ のあたりをわかりやすく拡大したものである。これを図6のように複数の領域に分けることができる。

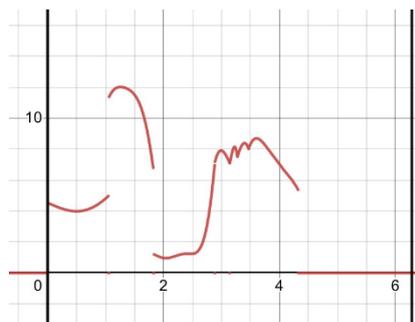


図5 拡大した $y = f(x)$



図6 領域に分けた $y = f(x)$

図6では、 $0 + 14n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 14n\pi$, $\frac{\pi}{3} + 14n\pi < x < \frac{7}{12}\pi + 14n\pi$, $\frac{7}{12}\pi + 14n\pi \leq x \leq \frac{11}{12}\pi + 14n\pi$, ...となるように緑の線で領域に分けている。(nは整数)

分けた領域ごとの関数の式を求める。絵を描くことが目的なので、厳密にはそのグラフと全く同じものを表す関数は求める必要はなく、ある程度近似したグラフを表す式であればよい。その方法は、グラフ上のいくつかの点をサンプリングして、コンピュータをつかって回帰曲線の式を求める。(データが十分にとれる場合はDFT計算によって求めるのがより正確。)これをそれぞれの領域の関数で行う。図7、図8、図9は $y = f(x)$ の一部の領域で適用したい関数の一部。

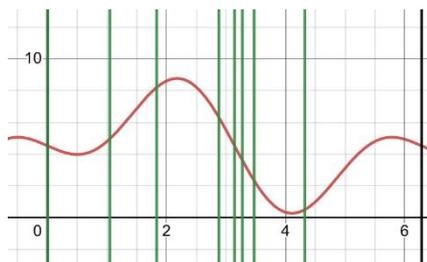


図7

$0 + 14n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 14n\pi$ で適用したい関数

$$a(x) = -2.1736 \sin 2x + 2.68308 \sin x + 4.53367$$

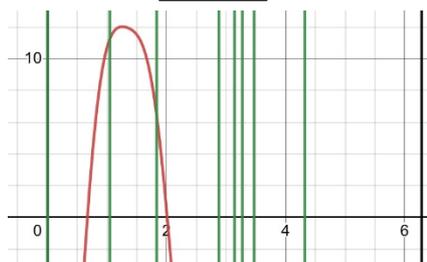


図8

$\frac{\pi}{3} + 14n\pi < x < \frac{7}{12}\pi + 14n\pi$ で適用したい関数

$$b(x) = -1.53124 \sin 6x + 8.62267 \sin 2x + 54.2318 \sin x - 43.1631$$

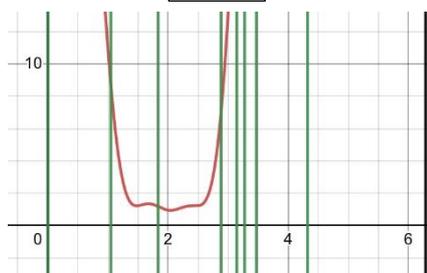


図9

$\frac{7}{12}\pi + 14n\pi \leq x \leq \frac{11}{12}\pi + 14n\pi$ で適用したい関数

$$c(x) = -0.82311 \sin 7x + 14.3742 \cos 3x + 21.0455 \sin 2x - 37.7234 \sin x + 38.2142$$

ある特定の領域だけで1を取り、その他の領域で0を取る関数を求める。ここでは床関数・天井関数を使う。それぞれの分割した領域でのみ1を取り、その他の領域で0を取る関数を求めるということだ。そのためには、ある領域でのみ $1 \leq x < 2$ 、その他の領域で $0 \leq x < 1$ になる関数を作って[]の中に入れる。領域と他の領域が連続する場合は、領域の境目の値で1を取る領域が重複し、値が2となることを防がなければならない。よってある領域で1を取り、その他の領域で0をとる関数を[]を使って作った時、連続する領域では、[]を使ってその領域で1を取り、その他の領域で0をとる関数を作らなければならない。そのために、ある領域でのみ $0 < x \leq 1$ 、その他の領域で $-1 < x \leq 0$ になる関数を作って[]の中に入れて良い。図10、図11、図12は、 $y = f(x)$ の領域ごとに、その領域で1を取り、その他の領域で0を取る関数の一部。

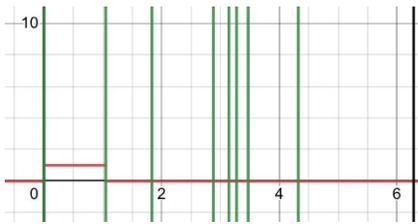


図 1 0

$0 + 14n\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 14n\pi$ で 1 を取り、その他の領域で 0 を取る関数

$$A(x) = \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{x}{7} + \frac{10}{21} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{10}{21} \pi \right]$$

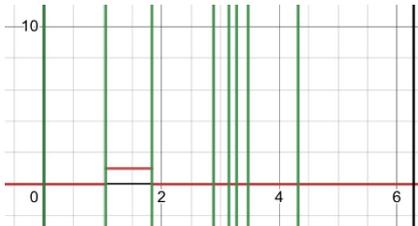


図 1 1

$\frac{\pi}{3} + 14n\pi < x < \frac{7}{12} \pi + 14n\pi$ で 1 を取り、その他の領域で 0 を取る関数

$$B(x) = \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{x}{7} + \frac{73}{168} \pi \right) - \frac{1}{2} \sin \frac{27}{56} \pi \right]$$

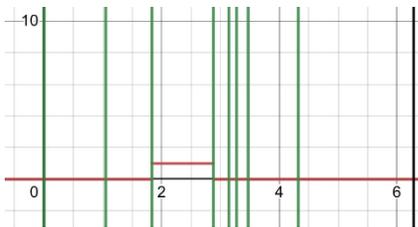


図 1 2

$\frac{7}{12} \pi + 14n\pi \leq x \leq \frac{11}{12} \pi + 14n\pi$ で 1 を取り、その他の領域で 0 を取る関数

$$C(x) = \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{x}{7} + \frac{11}{28} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{10}{21} \pi \right]$$

それぞれの領域で求めた、近似曲線の式と、その領域で 1 をとり、その他の領域で 0 をとる関数の式を、それぞれの領域ごとに積の形にして、これらを足す。この操作によってできた関数が $f(x)$ (の近似式) である。このようになる理由を説明する。近似曲線の式と、その領域で 1 をとり、その他の領域で 0 をとる関数の積は、その領域だけでの近似曲線を取り出したものになり、その領域以外では 0 を取る。これと同じことを全ての分割した領域で行い、足すことで、目的の区分関数が 1 つの式で表せるようになる。

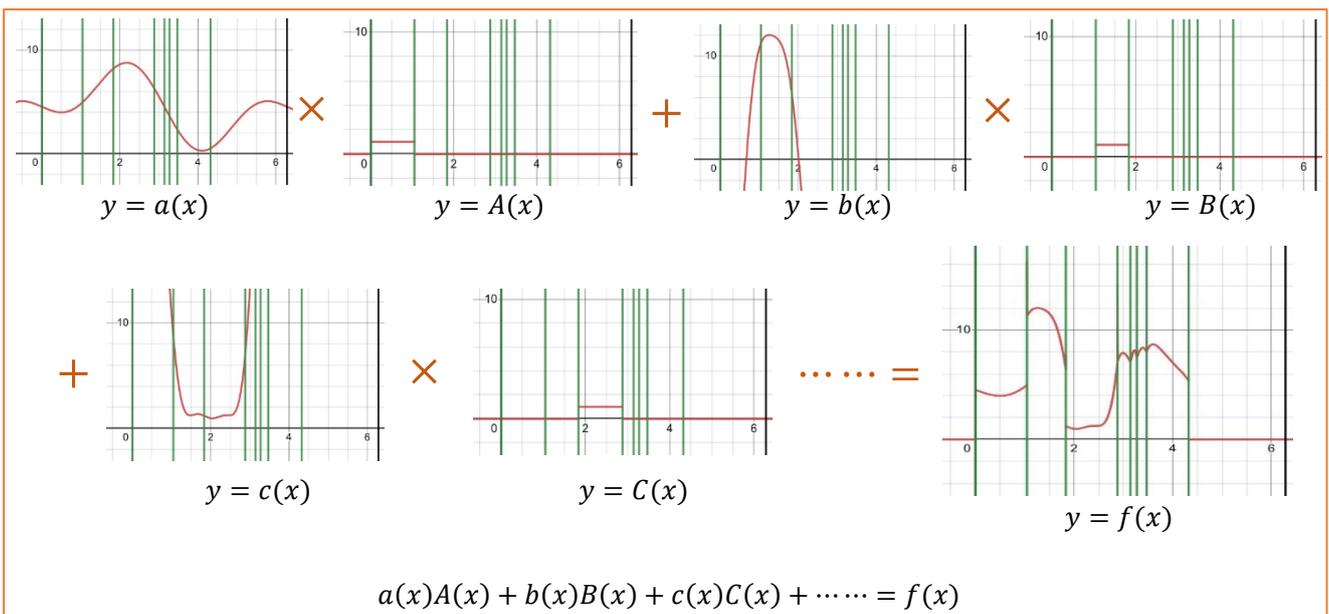


図 1 3 $f(x)$ の求まる過程

$r = f(\theta)$ の式を求めて描画すれば目的の絵が極座標平面上に描ける。以上のことで、求めたかった $f(x)$ の式が求められる。 $f(x)$ の式がわかれば当然 $f(\theta)$ の式がわかるので、任意の形のグラフを表す $r = f(\theta)$ を描けるようになる。以下の極方程式は、図13の過程を経て例として求めた図1のアヒルの形のグラフを表すものである。この極方程式のグラフを極座標平面上に描画したものが図14である。

$$\begin{aligned}
 f(\theta) = & (-2.1736 \sin 2\theta + 2.68308 \sin \theta + 4.53367) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{10}{21} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{10}{21} \pi \right] \\
 & + (-1.53124 \sin 6\theta + 8.62267 \sin 2\theta + 54.2318 \sin \theta - 43.1631) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{73}{168} \pi \right) - \frac{1}{2} \sin \frac{27}{56} \pi \right] \\
 & + (-0.82311 \sin 7\theta + 14.3742 \cos 3\theta + 21.0455 \sin 2\theta - 37.7234 \sin \theta + 38.2142) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{11}{28} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{10}{21} \pi \right] \\
 & + (-120.088 \sin 2\theta - 231.991 \sin \theta + 7.1) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{61}{168} \pi \right) - \frac{1}{2} \sin \frac{85}{168} \pi \right] \\
 & + (953.005 \sin 2\theta + 1886.64 \sin \theta + 7.1) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{17}{48} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{167}{336} \pi \right] \\
 & + (93.0695 \sin 2\theta + 167.977 \sin \theta + 5.33719) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{233}{672} \pi \right) - \frac{1}{2} \sin \frac{111}{224} \pi \right] \\
 & + (-6.88312 \sin 4\theta - 25.1497 \cos 3\theta + 33.337 \sin 2\theta - 29.4038 \sin \theta - 29.0042) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{31}{96} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{349}{672} \pi \right] \\
 & + (-12.5903 \sin \theta + 15.8982) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{29}{168} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{85}{168} \pi \right] + 10.5 \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{83}{504} \pi \right) + \frac{1}{2} \right] + 8.8 \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{17}{112} \pi \right) + \frac{1}{2} \right] \\
 & + (-176.339 \sin \theta + 176.83) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{15}{112} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{167}{336} \pi \right] + (-51.0181 \sin \theta + 16.8592) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{79}{1008} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{505}{1008} \pi \right] \\
 & + (-0.204237 \cos 3\theta + 0.181261 \cos 2\theta - 2.63877 \cos \theta + 7.21705) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} + \frac{\pi}{336} \right) - \frac{1}{2} \sin \frac{193}{336} \pi \right] \\
 & + (-12.0253 \cos 2\theta - 41.1037 \sin \theta + 36.1138) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{19}{168} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{41}{84} \pi \right] \\
 & + (6.23573 \cos \theta + 2.81393) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{17}{112} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{167}{336} \pi \right] + (9.92936 \sin \theta + 6.69604) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{227}{1008} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{499}{1008} \pi \right] \\
 & + (-8.73611 \cos \theta - 1.82342) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{493}{2016} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{1027}{2016} \pi \right] \\
 & + (0.221253 \sin 47\theta - 52.0782 \sin 4\theta - 55.7135 \sin 3\theta - 141.08 \sin 2\theta + 125.731 \sin \theta + 197.165) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{134}{504} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{247}{504} \pi \right] \\
 & + (2.74242 \sin 2\theta + 1.08347 \sin \theta + 4.69145) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{11}{28} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{83}{168} \pi \right] \\
 & + (13.7604 \sin \theta - 0.616896) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{135}{336} \pi \right) - \frac{1}{2} \sin \frac{167}{336} \pi \right] \\
 & + (-104.074 \sin 3\theta - 37.4124 \sin 2\theta - 614.863 \sin \theta - 491.681) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{559}{1008} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{71}{144} \pi \right] \\
 & + (-6.15459 \sin 2\theta - 22.7817 \sin \theta + 31.9088) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{695}{1008} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{489}{1008} \pi \right] \\
 & + (0.11387 \sin 47\theta + 4.9789 \sin 4\theta - 127.648 \sin 3\theta + 12.7111 \sin 2\theta - 1151.63 \sin \theta - 1014.6) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{1717}{2016} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{1027}{2016} \pi \right] \\
 & + (83.151 \cos 5\theta + 81.304 \sin 4\theta + 240.469 \sin 3\theta - 145.642 \sin 2\theta + 752.142 \sin \theta - 486.374) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{983}{1008} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{489}{1008} \pi \right] \\
 & + (-1083.01 \sin 3\theta - 2400.47 \cos 2\theta + 3.05056 \cos \theta - 1309.16) \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{2299}{2016} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \frac{995}{2016} \pi \right] \\
 & + 9.7 \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{2299}{2016} \pi \right) + 1 - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{635}{504} \pi \right) + \frac{1}{2} \right] + 8.8 \left[\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\theta}{7} - \frac{91}{72} \pi \right) + \frac{1}{2} \right]
 \end{aligned}$$

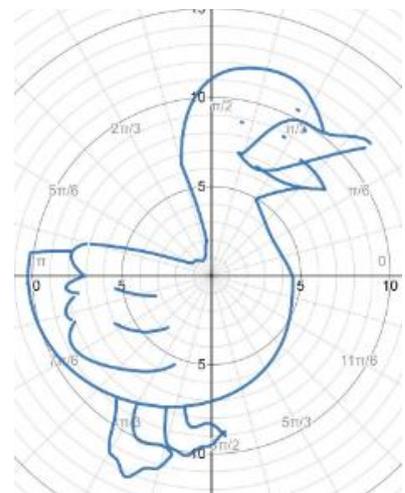


図14 $r = f(\theta)$ のグラフ

Ⅲ. 結果

以上の方法ならば極座標平面上に好きな絵が描けることがわかった。実際にアヒルの形のグラフを描くことができ、他にも猫の形や鳥の形のグラフなどを描くことができた。不連続な点、微分可能でない点、変数が1つに定まってもう1つの変数が1つに定まらない点を含む形も描くことができた。

Ⅳ. 考察

これらのことより、この研究で発見した方法で、点と線だけで構成された形のグラフはほとんどすべてでそれを表す極方程式を求められると考えられる。逆に、極方程式を求められないようなグラフは、一部の領域が線で隙間なく敷き詰められていたり(面を含む)、そもそも視覚的に形がよくわからないグラフを表すようなもの(x が有理数のとき y が1をとり、 x が無理数のとき y が0をとるグラフなど)であったりする場合である。しかし、人間が描く絵は、そのような要素を含まないので、人間の描くあらゆる絵を極座標平面上に描画できると考えられる。ただ、どれほど複雑な形のグラフでも理論上求められるが、求まる極方程式は極端に長いものになり、それを求める過程にも膨大な時間がかかってしまうという特徴がある。そのため、この研究によって、全く効率的ではないがとても一般性のある、任意のグラフを表す極方程式を求める方法を発見したと言えるだろう。

参考文献

- ・極座標とは 直交座標系の極座標表示 | 高校数学の知識庫 (math-souko.jp)
- ・床関数(ガウス記号)・天井関数の定義と性質～切り捨て・切り上げ～ | 数学の景色 (mathlandscape.com)

使用したグラフ描画ソフト：Desmos

使用した画像：いらすとや より